

Title	球面の射影を応用したウルフ図形の研究 (可微分写像の特異点論を用いたトポロジー・微分幾何学の研究)
Author(s)	西村, 尚史
Citation	数理解析研究所講究録 = RIMS Kokyuroku (2019), 2140: 16-22
Issue Date	2019-12
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/254919">http://hdl.handle.net/2433/254919</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 球面の射影を応用したウルフ図形の研究

横浜国立大学・大学院環境情報研究院 西村 尚史

TAKASHI NISHIMURA

FACULTY OF ENVIRONMENT AND INFORMATION SCIENCES,  
YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY

### 1. 序

本稿においては，“球面”とは  $\mathbb{R}^{n+1}$  内の単位球面  $S^n$  のことであり，“球面の射影”とは全射線形写像  $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$  の  $S^n$  への制限である  $\pi|_{S^n}: S^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  のこととする．韓 呼和氏（西北農林科技大学（中国））と筆者との二人で，ウルフ図形の研究への球面の射影の応用を [2] において試みた次第である．本稿においては，その試みの概略とともに動機やら途中の失敗談などをご紹介します．

### 2. 動機

まず動機から述べる． $\text{inv}: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  を以下のように定義される写像とする（ようするに，反転 (inversion) と呼ばれる写像のことである）．ここで  $(\theta, r)$  は  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  の点の極座標表示を表すものとする．

$$\text{inv}(\theta, r) = \left( -\theta, \frac{1}{r} \right).$$

$\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\}$  とおく．連続関数  $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対し， $\text{inv}(\text{graph}(\gamma))$  の凸胞の境界を  $\Gamma_\gamma$  と表すことにする，ここに  $\text{graph}(\gamma)$  は以下のように定義される  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  の部分集合のこととする．

$$\text{graph}(\gamma) = \{(\theta, \gamma(\theta)) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \mid \theta \in S^n\}.$$

連続関数  $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  は，等式  $\Gamma_\gamma = \text{inv}(\text{graph}(\gamma))$  が成り立つとき **convex integrand** と呼ばれ， $\Gamma_\gamma$  が狭義凸である凸体の境界であるとき **strictly convex integrand** と呼ばれる．与えられた convex integrand  $\gamma: S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対し， $\gamma$  に随伴するウルフ図形 ( $\mathcal{W}_\gamma$  という記号で表される) とは次の共通部分のことである．

$$\bigcap_{\theta \in S^n} \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \cdot \theta \leq \gamma(\theta)\},$$

ウルフ図形概念は，G. Wulff により 1901 年に [5] において，平衡状態にある結晶の幾何学モデルとして導入された．ウルフ図形  $\mathcal{W}_\gamma$  に対し，convex integrand  $\gamma$  は結晶の表面エネルギー密度とみなすことができる．

次に二つの集合  $CI(S^n, \mathbb{R}_+)$  と  $\mathcal{H}_{\text{conv}, 0}(\mathbb{R}^{n+1})$  を次のように定義する．

$$CI(S^n, \mathbb{R}_+) = \{\gamma \in C^0(S^n, \mathbb{R}_+) \mid \gamma: \text{convex integrand}\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{conv}, 0}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{ & W \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid W: \text{凸体}, \\ & 0 \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ は } W \text{ の内点} \}. \end{aligned}$$

すると， $CI(S^n, \mathbb{R}_+)$  は最大距離  $d: CI(S^n, \mathbb{R}_+) \times CI(S^n, \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  に関して距離空間となり， $\mathcal{H}_{\text{conv}, 0}(\mathbb{R}^{n+1})$  はハウスドルフ距離  $h: \mathcal{H}_{\text{conv}, 0}(\mathbb{R}^{n+1}) \times$

$\mathcal{H}_{conv,0}(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$  に関して距離空間となることがわかる．関数空間  $CI(S^n, \mathbb{R}_+)$  から図形空間  $\mathcal{H}_{conv,0}(\mathbb{R}^{n+1})$  への写像

$$\mathcal{W} : CI(S^n, \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathcal{H}_{conv,0}(\mathbb{R}^{n+1})$$

を以下のように自然に定義する．

$$\mathcal{W}(\gamma) = \mathcal{W}_\gamma.$$

この写像  $\mathcal{W}$  はウルフの構成法と呼ばれる．ウルフの構成法  $\mathcal{W}$  は全単射であることは比較的容易にわかる．さらに，韓氏と筆者は次の定理 1 を証明することができた．

**定理 1.**  $\mathcal{W} : (CI(S^n, \mathbb{R}_+), d) \rightarrow (\mathcal{H}_{conv,0}(\mathbb{R}^{n+1}), h)$  は等距離写像である．

定理 1 から特に次の系 1 を得る．

**系 1.** ウルフの構成法  $\mathcal{W}$  は連続写像である．

ところが，残念なことに，定理 1 は既知の結果であって，[4] に証明つきで載っていたのであった．そこで，「定理 1 の目新しい応用を見つける」という方向に舵を切り替えたのである．さらに，完成した論文を John Mather 追悼研究会のプロシーディングスに投稿したいと思っていたので，写像の特異点論の観点から眺めても魅力的に見えるような論文に仕上げたいと思っていたのである．この段階ではまだ，定理 1 の目新しい応用に主眼が置かれていて，“球面の射影”との関連は全くないものであった．

長時間の暗中模索を繰り返した．その結果，最終的には， $\text{inv}(\text{graph}(\gamma))$  がアフィン関数のグラフとして与えられるような二つの convex integrand を考えることにすれば，J. Mather が [3] において証明なしで述べている“球面の射影”に関する事実（次節の事実 1）と結びつけることができ，そのような convex integrand を使って任意の convex integrand の 1 助変数摂動族を二つ考え，それらのハウスドルフ距離の極限の記述に定理 1 が使えることがわかった．この段階に到達できてようやく“球面の射影”と関連付けることができ，さらに，目新しい応用もなんとか得ることができた次第である．

### 3. 球面の射影

John Mather は [3] において次の事実を証明なしで述べている．

**事実 1** (J. Mather[3]).  $n, p$  は， $n+1 > p$  を満たす自然数とする．そのとき以下が成立する．

- (1) どんな球面の射影  $\pi_1|_{S^n}, \pi_2|_{S^n}$  も  $\mathcal{A}$ -同値である．もっと詳しく述べると，球面の回転  $h : S^n \rightarrow S^n$  と線形同型写像  $H : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  が存在して以下が成立する．

$$\pi_1|_{S^n} = H \circ (\pi_2|_{S^n}) \circ h.$$

- (2) すべての  $\pi|_{S^n}$  は安定である．もっと詳しく述べると， $\pi|_{S^n}$  の特異点集合  $\Sigma(\pi|_{S^n})$  は正定値折り目特異点からなる  $(p-1)$ -次元球面であり，

$$\pi|_{\Sigma(\pi|_{S^n})} : \Sigma(\pi|_{S^n}) \rightarrow \mathbb{R}^p$$

は埋め込みである．

この事実 1 の証明は容易である（だから，[3] に証明なしで記述してあるのであろう，とも思える）．この事実 1 をウルフ図形の舞台上から眺めてみる．

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  とし,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  とする.  $i = 1, 2$  に対し, 次の形の球面上のアフィン関数  $f_{\mathbf{a}_i, c_i} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  を考える.

$$f_{\mathbf{a}_i, c_i}(X) = \mathbf{a}_i \cdot X + c_i \quad (X \in S^n).$$

すると, 事実 1 から, 次の命題 1 を容易に得ることができる.

- 命題 1 ([2]). (1)  $i$  が 1 であれば 2 であれば  $f_{\mathbf{a}_i, c_i}$  は必ず安定であって, その特異点集合  $\Sigma(f_{\mathbf{a}_i, c_i})$  は 2 点集合  $\left\{ \frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, -\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|} \right\}$  である. さらに, 特異点  $\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}, -\frac{\mathbf{a}_i}{\|\mathbf{a}_i\|}$  はモース指数  $0, n$  のモース特異点である.
- (2)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  が線形独立と仮定する. すると, 写像  $(f_{\mathbf{a}_1, c_1}, f_{\mathbf{a}_2, c_2}) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  は安定であり, その特異点集合  $\Sigma((f_{\mathbf{a}_1, c_1}, f_{\mathbf{a}_2, c_2}))$  は円周  $S^1 \cap (\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2)$  である. さらに, すべての特異点は正定値折り目特異点である.
- (3)  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  が線形従属と仮定する. すると, 写像  $(f_{\mathbf{a}_1, c_1}, f_{\mathbf{a}_2, c_2}) : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  は安定関数とみなすことができ, その特異点集合  $\Sigma((f_{\mathbf{a}_1, c_1}, f_{\mathbf{a}_2, c_2}))$  は 2 点集合  $\left\{ \frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, -\frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|} \right\}$  である. さらに, 特異点  $\frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}, -\frac{\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|}$  はモース指数  $0, n$  のモース特異点である.

#### 4. グラフの INVERSION 像がアフィン関数の平方根となる CONVEX INTEGRAND

前節の  $\mathbf{a}_i, c_i$  に対して,  $\mathbf{a}_i \cdot X + c_i = \|\mathbf{a}_i\| \cos \theta + c_i$  となっていることはすぐわかる, ここに  $\theta$  は  $\mathbf{a}_i$  と  $X \in S^n$  とがなす角度である ( $\theta$  の余弦関数しか登場していないので,  $\theta$  はどちらからどちらへの角度でも構わない). これより, もしも  $\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  であれば,  $f_{\mathbf{a}_i, c_i}(S^n) \subset \mathbb{R}_+$  を得ることはすぐわかる. さらに以下を示せる.

命題 2 ([2]). 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $\frac{3}{2}\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  を仮定する. 関数  $g_{\mathbf{a}_i, c_i} : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}(X) = \sqrt{f_{\mathbf{a}_i, c_i}(X)}$  で定義する. すると,  $\text{graph}(g_{\mathbf{a}_i, c_i})$  は狭義凸である凸体の境界になっている.

系 2 ([2]). 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $\frac{3}{2}\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  を仮定する. 関数  $\frac{1}{g_{\mathbf{a}_i, c_i}} : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を  $\frac{1}{g_{\mathbf{a}_i, c_i}}(X) = \frac{1}{\sqrt{f_{\mathbf{a}_i, c_i}(X)}}$  で定義する. すると,  $\frac{1}{g_{\mathbf{a}_i, c_i}}$  は *strictly convex integrand* になっている.

#### NOTE

- (1) 命題 2 は, 球面  $S^n$  上の異なる 2 点  $P, Q$  (ただし,  $P \neq -Q$ ) をとり,  $P, Q$  を結ぶ測地線を  $\xi : (p, q) \rightarrow S^n$  とおくと, 曲線  $g_{\mathbf{a}_i, c_i} \circ \xi : (p, q) \rightarrow \mathbb{R}_+$  の曲率が常に正であることを示すことにより証明される. 仮定  $\frac{3}{2}\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  は, 曲率が常に正となるための条件である.
- (2) 関数  $f_{\mathbf{a}_i, c_i}$  に対し次が成り立つ.

命題 3 ([2]). 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $2\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  を仮定する. すると,  $\text{graph}(f_{\mathbf{a}_i, c_i})$  は, 常に, 狭義凸である凸体の境界になっている.

系 3 ([2]). 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $2\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  を仮定する. すると,  $\frac{1}{f_{\mathbf{a}_i, c_i}}$  は, 常に, *strictly convex integrand* になっている.

[2] においては,  $f_{\mathbf{a}_i, c_i}$  ではなく  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}$  が採用してある. その理由は二つある. “ $\frac{3}{2}\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  という仮定は  $2\|\mathbf{a}_i\| < c_i$  という仮定よりも弱い仮定である” というのが一つ目の理由である. より適用範囲が広いほうが望ましい結果と言えるからである. もう一つの理由は後ほど (第 7 節で) 失敗談を説明するときに判明する.

### 5. 任意の $C^2$ 級 CONVEX INTEGRAND の 1 助変数摂動族

二つの  $C^2$  級 convex integrand  $\gamma_1, \gamma_2 : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を考える.  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) は必ずしも strictly convex integrand とは仮定されていないことに注意されたい. また, 極座標表示を用いた曲率が証明で必要となるので  $C^2$  級が仮定されていることにも注意されたい.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^{n+1} - \mathbf{0}$  と  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  は,

$$c_1 > \frac{3}{2} \|\mathbf{a}_1\|, c_2 > \frac{3}{2} \|\mathbf{a}_2\|$$

を満たしているとする (第 4 節を参照). 次に,  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}$  を用いた  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) の摂動の 1 助変数族を構成する. 任意の  $t \in (0, \infty)$  に対し, 関数  $\Gamma_{1,t}, \Gamma_{2,t} : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,t}(X) &= \frac{t\gamma_1(X)}{1 + t\gamma_1(X)g_{\mathbf{a}_1, c_1}(X)}, \\ \Gamma_{2,t}(X) &= \frac{t\gamma_2(X)}{1 + t\gamma_2(X)g_{\mathbf{a}_2, c_2}(X)}. \end{aligned}$$

#### NOTE

(1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_{i,t}(-X)} &= \frac{1 + t\gamma_i(-X)g_{\mathbf{a}_i, c_i}(-X)}{t\gamma_i(-X)} \\ &= \frac{1}{t\gamma_i(-X)} + g_{\mathbf{a}_i, c_i}(-X) \\ &= \frac{1}{t} \left( \frac{1}{\gamma_i(-X)} + tg_{\mathbf{a}_i, c_i}(-X) \right). \end{aligned}$$

よって,  $\Gamma_{i,t}$  が  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}$  を用いた  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2$ ) の摂動の 1 助変数族になっていることがわかる.

(2) Convex integrand  $\gamma_i$  に対し,  $\text{graph}(\frac{1}{\gamma_i}) = \text{inv}(\text{graph}(\gamma_i))$  はウルフ図形  $\mathcal{W}_{\gamma_i}$  の双対ウルフ図形の境界になっている.

“ $\Gamma_{i,t}$  は convex integrand であろうか?” というのは自然な問題と思えるが, それに対しては次の命題が解答を与える.

**命題 4** ([2]).  $t \in \mathbb{R}_+$  が十分に大きければ, 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $\Gamma_{i,t}$  は常に strictly convex integrand である.

#### NOTE

- (1) 命題 4 は, 命題 2 における証明と同様に, 球面  $S^n$  上の異なる 2 点  $P, Q$  (ただし,  $P \neq -Q$ ) をとり,  $P, Q$  を結ぶ測地線を  $\xi : (p, q) \rightarrow S^n$  とおくと, 曲線  $\frac{1}{\gamma_i \circ \xi} + tg_{\mathbf{a}_i, c_i} \circ \xi : (p, q) \rightarrow S^n$  の曲率が常に正であることを示すことにより証明される.  $t$  が十分大きいという仮定は, 曲率が常に正となるための条件である.
- (2) 与えられた convex integrand  $\gamma_i$  が strictly convex integrand でなかったとしても,  $t$  を十分に大きく取りさえすれば  $\Gamma_{i,t}$  は常に strictly convex integrand になるわけである.
- (3) 命題 4 と [1] の主結果を組み合わせれば, 以下の系を得る.

系 4 ([2]).  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $\gamma_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $C^2$  級の *convex integrand* とし,  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$  は  $c_i > \frac{3}{2}\|\mathbf{a}_i\|$  を満たしているとする. さらに,  $t$  は十分に大きい実数とする. そのとき, ウルフ図形  $\mathcal{W}_{\Gamma_{i,t}}$  の境界  $\partial\mathcal{W}_{\Gamma_{i,t}}$  は常に  $C^1$  級である.

## 6. 主結果

定理 2 ([2]).  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  を  $\mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$  の二つのベクトルとし,  $c_1, c_2$  を以下を満たす二つの正の実数とする.

$$\frac{3}{2}\|\mathbf{a}_1\| < c_1, \quad \frac{3}{2}\|\mathbf{a}_2\| < c_2.$$

$g_{\mathbf{a}_i, c_i} : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}(X) = \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot X + c_i}$  で定義される関数とする. さらに, 任意の  $i \in \{1, 2\}$  に対し,  $\gamma_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  を  $C^2$  級の *convex integrand* とし  $\Gamma_{i,t} : S^n \rightarrow \mathbb{R}$  を  $\Gamma_{i,t}(X) = \frac{t\gamma_i(X)}{1+t\gamma_i(X)g_{\mathbf{a}_i, c_i}(X)}$  で定義される関数とする. そのとき, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathcal{W}(\Gamma_{1,t}), \mathcal{W}(\Gamma_{2,t})) \\ &= \max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot X + c_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_2 \cdot X + c_2}} \right| \mid X \in S^n \cap (\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2) \right\}. \end{aligned}$$

## NOTE

- (1) 定理 1, 系 1, 命題 1, 系 2 を組み合わせて使うことにより定理 2 は証明される.
- (2) もしも  $t \in \mathbb{R}_+$  が十分大きい実数であれば,  $\Gamma_{1,t}, \Gamma_{2,t}$  のどちらも strictly convex integrand になるのであった (命題 4). 従って, 定理 1 より次を得る.

$$h(\mathcal{W}(\Gamma_{1,t}), \mathcal{W}(\Gamma_{2,t})) = d(\Gamma_{1,t}, \Gamma_{2,t}).$$

とはいえ, もしも  $C^2$  級 convex integrand  $\gamma_1, \gamma_2$  が任意に与えられたのであれば,

$$h(\mathcal{W}(\Gamma_{1,t}), \mathcal{W}(\Gamma_{2,t}))$$

の近似値を得たいと思ったとしても一般には不可能そうに思える. しかし, 定理 2 により,

$$\max \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_1 \cdot X + c_1}} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}_2 \cdot X + c_2}} \right| \mid X \in S^n \cap (\mathbb{R}\mathbf{a}_1 + \mathbb{R}\mathbf{a}_2) \right\}$$

近似値を計算しさえすれば, いくらでも良い精度で,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(\mathcal{W}(\Gamma_{1,t}), \mathcal{W}(\Gamma_{2,t}))$$

の近似値を得ることが可能になるわけである. すなわち, 十分大きな  $t \in \mathbb{R}_+$  に対しては,

$$h(\mathcal{W}(\Gamma_{1,t}), \mathcal{W}(\Gamma_{2,t}))$$

の近似値の候補が,  $C^2$  級 convex integrand  $\gamma_1, \gamma_2$  に依存しない形で得られることになるのである.

## 7. 失敗談

命題 2 は当初は  $c_i > \|\mathbf{a}_i\|$  という仮定の元での主張になっていて、その証明は以下のようなものであった。

任意の  $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$  に対し、 $\mathbf{e}_k$  は  $\mathbb{R}^{n+1}$  の  $k$  番目の基本ベクトルを表すものとする。  $X = (X_1, \dots, X_{n+1}) \in S^n$  および

$$\alpha_i = \frac{c_i + \sqrt{c_i^2 - \|\mathbf{a}_i\|^2}}{2} \text{ and } \beta_i = \frac{c_i - \sqrt{c_i^2 - \|\mathbf{a}_i\|^2}}{2}$$

とおく。そのとき以下が成立することが容易にわかる。

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^{n+1} X_k^2, \\ c_i &= \alpha_i + \beta_i, \\ \alpha_i \beta_i &= \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2}{4}, \\ 2\alpha_i &> (\alpha_i + \beta_i = c_i >) \|\mathbf{a}_i\|. \end{aligned}$$

これらを用い、任意の  $X \in S^n$  に対して  $f_{\mathbf{a}_i, c_i}(X) = \mathbf{a}_i \cdot X + c_i$  を次のように変形してみる。

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}_i, c_i}(X) &= \mathbf{a}_i \cdot X + c_i \\ &= \mathbf{a}_i \cdot X + (\alpha_i + \beta_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k) X_k + \alpha_i \left( \sum_{k=1}^{n+1} X_k^2 \right) + \beta_i \\ &= \alpha_i \sum_{k=1}^{n+1} \left( X_k^2 + \frac{(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k)}{\alpha_i} X_k \right) + \beta_i \\ &= \alpha_i \sum_{k=1}^{n+1} \left( \left( X_k + \frac{(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_k)}{2\alpha_i} \right)^2 - \frac{\|\mathbf{a}_i\|^2}{4\alpha_i^2} + \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i^2} \right) \\ &= \alpha_i \left\| X + \frac{1}{2\alpha_i} \mathbf{a}_i \right\|^2, \\ &= \left\| \sqrt{\alpha_i} X + \frac{1}{2\sqrt{\alpha_i}} \mathbf{a}_i \right\|^2 > 0. \end{aligned}$$

すると、特別な形をした  $C^\infty$  級微分同相写像  $h: S^n \rightarrow S^n$  が存在し、 $\text{graph}(g_{\mathbf{a}_i, c_i} \circ h)$  は中心が  $\frac{1}{2\sqrt{\alpha_i}} \mathbf{a}_i$  で半径が  $\sqrt{\alpha_i}$  の球面になっていることがわかる。

従って、 $\text{graph}(g_{\mathbf{a}_i, c_i})$  は狭義凸である凸体の境界になっている。

最後の下線部分にはギャップがあるのであるが、我々はしばらくの間そのギャップに気づかずだった。そして、球面を使った幾何学的証明は初等的でありわかりやすく魅力的に思えた。従って、 $c_i > \|\mathbf{a}_i\|$  という弱い仮定の元での命題 2 に対して ( $f_{\mathbf{a}_i, c_i}$  でなく) 自然に球面と結びつく  $g_{\mathbf{a}_i, c_i}$  を採用した次第である。

## 謝辞

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University; and by JSPS KAKENHI Grant Number 17K05245.

## REFERENCES

- [1] H. Han and T. Nishimura, *Strictly convex Wulff shapes and  $C^1$  convex integrands*, Proc. Amer. Math. Soc., **145** (2017), 3997–4008.
- [2] H. Han and T. Nishimura, *Limit of the Hausdorff Distance for One-parameter Families of Wulff Shapes Constructed by Affine Perturbations of Dual Wulff Shapes*, to appear in Methods and Applications of Analysis special volume in memory of John Mather.
- [3] J. Mather, *Generic Projections*, Ann. of Math., **98** (1973), 226–245.
- [4] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory* 2nd Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [5] G. Wulff, *Zur frage der geschwindigkeit des wachstrums und der auflösung der kristallflächen*, Z. Kristallographie und Mineralogie, **34** (1901), 449–530.